

Mathematik zum Tragen bringen

Kenntnisse und Fertigkeiten taugen nachschulisch nur, wenn sie flexibel anwendbar sind. Darum müssen sie immer wieder in Problemsituationen zum Einsatz kommen. Ein Kennzeichen guten Mathematikunterrichts – von der Basisstufe bis zum Ende der Schulzeit – ist die Problemorientiertheit.

«Problemlösefähigkeit» tritt als Richtziel in Mathematiklehrplänen auf. Das mag den Eindruck erwecken, es handle sich dabei um eine spezifisch mathematische Kompetenz. Dem ist natürlich nicht so. Aber gutes Problemlöseverhalten ist beim Bearbeiten mathematischer Probleme eine entscheidende Voraussetzung. Und in mathematischen Kontexten kann diese Kompetenz wirksam aufge-

baut und nachhaltig trainiert werden. Dabei geht es – unabhängig vom Inhalt – vor allem um eine gute Problemlösekultur bei Lehrpersonen und Lernenden, wie sie im Grundlagenartikel beschrieben ist. Mathematikspezifisch kommen Zielsetzungen dazu, die zum Beispiel als Kompetenzaspekte bei HarmoS¹ oder als Richtziele im mathbu.ch beschrieben sind.

Mathematische Kompetenzaspekte von HarmoS		Richtziele im Bereich Problemlösen im mathbu.ch 7–9
<ul style="list-style-type: none"> • Wissen/erkennen • Operieren • Hilfsmittel gebrauchen • Modellieren • Argumentieren • Darstellen • Reflektieren • Explorieren <p>(Ausführungen im .net Downloadbereich)</p>	<p>Bei einigermaßen offenen Problemstellungen werden meistens alle acht HarmoS-Kompetenzen eine Rolle spielen. In Problemlösesituationen können wir insbesondere das Explorieren, Reflektieren, Darstellen und Argumentieren aufbauen. Natürlich können Problemstellungen auch auf einen dieser Aspekte fokussieren.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Planen, entscheiden • Annahmen treffen, Hypothesen aufstellen • Experimentieren, variieren • Strategien entwickeln • Protokollieren, dokumentieren • Reflektieren und überprüfen <p>(Vergleiche Begleitband 7, S. 23 und 70)</p>

Die «andere» Aufgabe

Ein Ziel des Mathematikunterrichts ist von Anfang an, eindeutig beantwortbare Fragen rasch und sicher zu beantworten: «5 plus 6 gleich 11.» «Sechzig Minuten sind eine Stunde.» «Der Umfang eines Rechtecks ist zweimal Länge und zweimal Breite.» – Elementare Kenntnisse eben.

Nicht weniger wichtig ist aber – auch von Anfang an! – die Zielsetzung, solch elementares Wissen in komplexen Situationen zum Tragen zu bringen. Weil es sonst nichts wert ist.

«Welche Zahl ist von 17 und 5 gleich weit weg?» – «Wie viel Zeit vergeht zwischen zwei Überdeckungen von Stunden- und Minutenzeiger?» – «Wie kann man ein Rechteck in zwei Teile zerlegen, so dass jeder Teil denselben Umfang hat wie das ursprüngliche Rechteck?»

Das Üben und Automatisieren von elementaren Kenntnissen und Fertigkeiten muss einhergehen mit der Behandlung von Fragestellungen abseits jeder Routine. Das braucht geeignete Aufgaben. Zum Beispiel solche, die an eine operative Grundhaltung appellieren («Was passiert, wenn ich...?»). Ein schönes Beispiel auf der Unterstufe ist die Problemstellung «die fünfte Zahl»:

1, 3, 4, 7, 11. ($1+3=4$, $3+4=7$, $4+7=11$).

Mit welchen beiden Startzahlen erhält man als fünfte Zahl 12?

¹ HarmoS: EDK-Projekt zur Harmonisierung der Volksschule, der Lehrpläne und der Bildungsstandards

Die folgende Problemstellung aus der Mittelstufe fokussiert das Explorieren:

<p>«Zerlege die Zahl 20 so, dass das Produkt der Teile möglichst gross wird.»</p>	$20 = 10 + 5 + 5$ $10 \cdot 5 \cdot 5 = 250$ $20 = 8 + 8 + 2 + 2$ $8 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2 = 256$ $20 = 10 + 10$ $10 \cdot 10 = 100$ $20 = 5 + 5 + 5 + 5$ $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ $20 = 5 + 5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ $5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 800$ $20 = 5 + 3 + 2 + 3 + 3 + 2 + 2$ $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 1620$	<p>In diesem kurzen Protokoll sind zwei Phasen zu erkennen:</p>
<p>Auf der Oberstufe kann der Sachverhalt mit reellen Zahlen untersucht werden.</p>	<p>«Trial and Error»</p> <p>Gezieltes Variieren aufgrund einer Vermutung – die leider nicht festgehalten ist.</p> <p>Fördermassnahme: Überlegungen dokumentieren!</p>	

Hypothesen bilden – explorieren – reflektieren – dokumentieren



Wie das vorangehende Beispiel zeigt, geht es beim Explorieren zuerst darum, mit einer gewissen Lockerheit den Sachverhalt «abzutasten» und aufgrund der ersten Ergebnisse eine Vermutung zu wagen. Das mag Schülerinnen und Schülern, die ein anderes Verständnis von Mathematik mitbringen, bereits schwerfallen. Als Nächstes muss zielloses «Trial and Error»-Verfahren mit Hilfe von Vermutungen weiterentwickelt werden zu zielorientiertem Ausloten. Hypothesen-Bilden ist eine wichtige Teilkompetenz der Problemlösefähigkeit. Ebenso wie das vollständige und verständliche Dokumentieren von Überlegungen. Gerade in der Aufbauphase

sind ausführliche Protokolle wichtig, damit das Vorausdenken auf die Lösung (Hypothesenbildung) und das Nachdenken über die Lösung (Reflektieren) trainiert werden können. Aber umfangreiche Dokumente sind nicht ohne weiteres zu erhalten. Sie sind das Ergebnis eigentlicher Knochenarbeit – der Lernenden wie der Lehrenden. Nicht zuletzt darum ist das Symbol für Problemlöseaufgaben im mathbu.ch gut gewählt: Es zeigt die Extrembergsteigerin Eveline Binsack. Problemlöseprotokolle drücken persönliche Denksuren aus. Mit ihnen muss sorgsam umgegangen werden. Rückmeldungen sollten insbesondere die Vollständigkeit und Verständlichkeit betreffen. Orthographie und Ästhetik sind keine primären Kriterien.

«Welche ganzzahligen Kantenlängen kann ein Quader mit 94 cm² Oberfläche haben?»

wir nehmen jetzt 4, 6, 2

jetzt haben wir 88 gebriagt.

Wir denken, dass der Unterschied zwischen den kleinen und den grossen grösser werden muss.

mit diesen Zahlen gibt es 100
Lara besteht darauf 5, 4, 3 aus
zu probieren, aber ich denke, dass
das nicht gut raus kommt

Summ gleich hat Lara darauf
bestanden diese Zahlen zu testen.

Wir haben eine LÖSUNG.

vielleicht müssen die Zahlen immer
12 geben. Aber die Zahlen dürfen
nicht mehrfach vertretten werden.

Stüpfle vom ganzen plus

Ich nehme jetzt ein mal dieses Würfel zur Hand so
ist genau die Hälfte der ganzen Seiten plus das Quadrat

Jetzt kann ich immer die Quatzahl der Quader ändern.
So bekomme ich davon alle Lösungen heraus. Wenn ich
diese Lösung mache $47 + 3^2 = 56 \Rightarrow$ Länge 7-3/Breite 3-3.
Jetzt nehme ich $47 + 4^2 = 63 \Rightarrow$ Länge 7-4/Breite 3-4. So
erhalte ich 5, 4, 3 so bekomme ich wieder die gleiche Lösung.
Jetzt gehe ich systematisch vor. Ich fange mal mit 1 an

Quadrat = 1^2 also $47 + 1 = 48$
 $6 \cdot 8 = 48$
 $6 - 1 = 5$ $8 - 1 = 7$ $7, 5, 1$ $7 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 7 = 47$
 man kann 48 auch anders teilen $4 \cdot 12 = 48$
 $3, 11, 1$ $= 3 \cdot 11 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 11 = 47$
 Es gibt auch $24 \cdot 2 = 48$
 $23, 1, 1 = 23 \cdot 1 + 1 \cdot 23 + 1 \cdot 1 = 47$

Diese Lösungen funktionieren alle

Explorierphase, gut dokumentiert
Strategisches Vorgehen aufgrund des Tipps,
nur die halbe Quaderoberfläche zu betrachten

«4 # 1 = 15; 5 # 2 = 24; 6 # 3 = 30

Was bewirkt die Operation # ?»

Diese Aufgabe zielt auf die Hypothesenbildung. Aus drei Startbeispielen muss eine Vermutung abgeleitet werden. Aufgrund der Vermutung denken sich die Lernenden nächste Beispiele aus und erfragen

bei der Lehrperson die entsprechenden Ergebnisse. Das wiederholt sich, bis die Operation aufgedeckt ist. Die folgende Seite zeigt Dokumente dazu aus dem zweiten, fünften und achten Schuljahr.



8. Klasse. Hypothesen bilden, reflektieren, argumentieren.

Operation #
 $4 \# 1 = 15$ $5 \# 2 = 24$ $6 \# 3 = 30$
 Feststellungen, Überlegungen, Vermutungen
 Die hintere Zahl der Rechnung ergibt die erste Ziffer der Lösung. Es ist immer eine gerade und eine ungerade.

Weitere Beispiele: $6 \# 5 = 50$ $9 \# 8 = 53,3$
 Feststellungen, Überlegungen, Vermutungen
 Also stimmt die Vermutung mit der letzten Ziffer nicht. Ich nehme jetzt mal ein bisschen höhere Beispiele

Weitere Beispiele: $1 \# 1 = 60$ $1 \# 2 = 120$
 Feststellungen, Überlegungen, Vermutungen
 Ich denke, dass man irgendetwas mal 60 rechnen muss, denn $1 \cdot 60 = 60$ $2 \cdot 60 = 120$, aber wenn man aber schaut sieht man nichts was man mal 60 rechnen könnte für das Resultat. Vielleicht muss man die beiden Zahlen irgendeine zusammen rechnen.

Weitere Beispiele: $4 \# 2 = 30$ $2 \# 4 = 120$
 Feststellungen, Überlegungen, Vermutungen
 Beide Ergebnisse haben etwas mit 60 zutun. Aha ich glaube man muss die zweite durch die erste Zahl rechnen und dann mal 60.

Feststellungen, Überlegungen, Vermutungen
 Wenn $1 \# 1 = 60$ gibt muss es ja irgendwo mal 60 sein, weil mit 1 und 1 kann ich ja nichts grosses mehr tun. Also habe ich gedacht $1 \cdot 1$ und dann mal 60. Dies ginge auch bei $1 \# 2$ aber oben stimmte dann nicht mehr. Also habe ich es mit durch versucht z.B. $1 \cdot 2 \cdot 60 = 120$. Also ist # die hintere Zahl durch die Vorderer und das Ergebnis mal 60.

5. Klasse. Anfänge zur Hypothesenbildung – mit unterschiedlichen sprachlichen Voraussetzungen.

$5 \oplus 1 = 10$ $3 \oplus 4 = 24$ $7 \oplus 2 = 28$
 Was könnte \oplus bedeuten? Schreibt eure Vermutung auf.
 Es könnte sein das man zuerst $\cdot 2$ rechnen muss und dann $\cdot 2 = \text{Lösung}$
 Mit welchen Zahlen möchtet ihr die Vermutung testen?
 $3 \oplus 2 = \cancel{12} \checkmark$

$3 \# 5 = 29$ $6 \# 2 = 23$ $1 \# 8 = 15$
 Was könnte # bedeuten? Schreibt eure Vermutung auf.
 man muss $\cdot 5$ und nachher $\cdot 2$ und -1 und alle bei anderen
 Mit welchen Zahlen möchtet ihr die Vermutung testen?
 $4 \cdot 5 = 39$

Die analoge Aufgabe in der 2. Klasse:

Sie schreiben $3 \otimes 4 = 14$ $5 \otimes 1 = 12$
 Was bedeutet \otimes ? Zusammenrechnen und Fertopel
 Wir testen $7 \otimes 2 = 18$ $6 \otimes 4 = 20$
 $8 \otimes 8 = 32$ $10 \otimes 4 = 28$

Gute Grundlagen zum Problemlösen im Mathematikunterricht und eine reiche Aufgabensammlung findet man in «Problemlösen macht Schule» von Beat Wälti-Scolari.

Wie die Beispiele zeigen, wird auch in einem problemorientierten Unterricht Basiswissen abgerufen und an den Basisfertigkeiten gearbeitet – zum Beispiel intensiv gerechnet. Dank dem immer wieder neuen Kontext wird aber dieses Grundwissen stärker vernetzt und dadurch flexibler einsetzbar. Und darüber hinaus werden Haltungen und Fähigkeiten geschult, die das Instrument Mathematik insgesamt breiter anwendbar machen. **Werner Jundt**

www.profi-l.net Download dieser Seiten sowie weiterer Materialien: www.profi-l.net

- mathbu.ch 8: Lernumgebung 7 (Ausschnitt)
- Ausführung zu Mathematik-Kompetenzaspekten
- Lösungen zu den Problemstellungen in diesem Aufsatz
- Arbeitsblatt zur obigen «Operation Gartenzaun»