Gesetze des Zufalls 34

Ziele

Richtziele

- Modelle bilden
- Argumentieren, Begründen, Widerlegen
- Annahmen treffen, Hypothesen aufstellen
- Experimentieren, Variieren
- Protokollieren, dokumentieren

Inhaltliche Ziele

- Erarbeiten eines tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbegriffs
- Häufigkeitsbaum und Wahrscheinlichkeitsbaum als Mittel zur Argumentation und Rechnung einsetzen
- Erarbeiten der Pfadregeln (UND und ODER –Regel)
- Schwankungen bei statistischen Experimenten erleben / "statistisch argumentieren" lernen
- \+ Mit Zufallszahl-Tabellen und /oder mit Tabellenkalkulation einfache SIMULATIONEN durchführen

Zur Sache

Wahrscheinlichkeitsrechnung und insbesondere Beschäftigung mit Statistik haben auf der Sekundarstufe I (leider) keine grosse Tradition. Weil aber im Alltag und in den Medien dauernd "statistisch argumentiert" wird und Glücksspiele Konjunktur haben, ist es angebracht, dieses extrem realitätsbezogene Thema allen Schülerinnen und Schülern zugänglich zu machen.

Einige Gedanken zu den lernpsychologischen Implikationen unseres Konzepts
Indem wir uns schon beim Einstieg auf ein (nur) teilweise symmetrisches Objekt stützen, ist von Anfang an die Einschätzung, das Gefühl, das **Subjektive** im Jugendlichen gefragt. Und im Gegensatz zum lange verbreiteten Irrtum, dass bei uns allen die Intuition im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeiten versage, zeigt sich bei diesem Einstieg **das genaue Gegenteil:** Schülerinnen und Schüler entwickeln nicht etwa "mühsam" im Laufe der Zeit ein Gefühl für Wahrscheinlichkeiten, sie haben schon von Beginn weg eine erstaunlich gute Intuition, wenn man bloss geeignetes Material wählt und nach dem "Gefühl" auch tatsächlich fragt.
Beim hier gewählten experimentellen Zugang besteht die Gelegenheit, das "Gefühl" / die Prognose auch zu prüfen und eventuell zu revidieren, und dieses Feedback ist zentral!.
Natürlich gibt es viele Leute, die nach einer '6' oder gar nach zwei Sechsen hintereinander nicht noch eine weitere '6' erwarten: dies ist ja auch korrekt!
Wenn aber ganz konkret gefragt wird: "Wettest du im nächsten Wurf eher auf '1' oder auf '6' ?", wird nach einiger Bedenkzeit keine der beiden Alternativen punkten, und eine Diskussion unter den Jugendlichen wird ganz eindeutig Zustimmung zum "gleich wahrscheinlich" bringen. Wo soll der Würfel denn sein Gedächtnis haben?
Nebenbei: genau hier kann man auch anfügen, dass "Simulieren einer 01-Folge" und "eine 01-Folge möglichst regellos daher sagen" zwei völlig verschiedene Dinge sind. Es gibt sogar Bestrebungen, bei der Alzheimer-Abklärung im Frühstadium solche Folgen mit einzubeziehen: der Zufall hat kein Gedächtnis!

Zum Konzept selbst
Vorerst wird ein tragfähiger Wahrscheinlichkeitsbegriff aufgebaut, der auch konsistent ist mit statistischem Denken und statistischen Inhalten. Es ist *ein* Ziel dieses Zugangs, die ungenetische Trennung zwischen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung zu überwinden. Beide Gebiete dürfen nicht beziehungslos nebeneinander stehen, sondern müssen sich gegenseitig befruchten. Insbesondere werden Wahrscheinlichkeiten *nicht* als "Grenzwert, wenn man unendlich viele Versuche durchführt" definiert: **Wahrscheinlichkeiten sind Prognosen, um welche die relativen Häufigkeiten in zukünftigen Versuchsserien schwanken werden.** Diese Auffassung ergibt sich zwanglos aus dem experimentellen Zugang, sie ist frei von hochgestochener Begrifflichkeit und erleichtert den Zugang zu statistischem Denken. Unsere Definition impliziert, dass

- diese Prognosen bei Vorliegen weiterer Information auch revidiert werden können,

- verschiedene Modelle unter Umständen zu verschiedenen Wahrscheinlichkeiten führen,
- subjektive Aspekte nicht ausgeschlossen werden ("nach Lage der Versuchsergebnisse halte ich Hypothese A für glaubwürdiger als Hypothese B"), und
- **Schwankungen** bei Experimenten nicht als "Störungen", sondern **essentiell als zur Statistik gehörend** wahrgenommen werden - und genau dadurch Schülerinnen und Schüler ein Gefühl für Schwankungen entwickeln!

Nochmals: Wenn dies an konkretem Material "festgemacht" wird, lernen die Jugendlichen mit Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeitshypothesen umgehen, und man muss nicht schon zu Beginn formal erklären, "was Wahrscheinlichkeiten sind".

Natürlich muss auch die Lehrkraft auf den zufälligen Ausgang von Zufallsexperimenten vorbereitet sein. Aus dem Blickwinkel der Statistik ist es viel wichtiger, ein Gefühl für die Schwankungen der relativen Häufigkeiten in endlichen Versuchsserien zu entwickeln als den Blick auf die Konvergenz in "unendlichen Serien" zu fixieren.
Insgesamt rückt ein *zentraler Gedanke* von Mathematik und Mathematikunterricht ins Zentrum: Mathematik – und insbesondere Stochastik - treiben heisst nicht, absolute Wahrheiten über die Wirklichkeit ableiten, sondern *in sich stimmige* Modelle von der Wirklichkeit zu erarbeiten.

Zum Unterricht

Wir folgen mit dieser Einheit u.a. verschiedenen Arbeiten von Wolfgang Riemer, der seine Gedanken und Konzepte seit vielen Jahren in zahlreichen Publikationen vertritt.
Die so genannten "Riemerwürfel", ein Set aus sieben verschiedenen teilsymmetrischen Objekten (je 15 Exemplare) werden zusammen mit einer ausgezeichneten Anleitung (Arbeitsblätter, Aufgaben, kurzen Erklärungen) und einer Diskette bei Klett vertrieben.
Auch von Riemer stammt die "abgespeckte Version", Experimente mit Quadern durchzuführen (Bemassung in Aufgabe ® im Arbeitsheft, dort ist auch die zugehörige Wahrscheinlichkeits-Verteilung aufgeführt.

Benötigte Hilfsmittel

Wir haben uns entschlossen, diese Einheit ohne Material, das speziell von aussen zugekauft werden muss zu konzipieren. Gewöhnliche HOLZWÜRFELCHEN werden zu einer Vierergruppe (**"Z"**) mit Weissleim verklebt. Dies kann mit den 2cm-Kanten-Würfeln aus dem Angebot von Ingold passieren, andere Kantenlängen sind ebenso brauchbar. Wie bei gewöhnlichen Würfeln schreiben wir auch diese Objekte so an, dass die Werte von gegenüberliegenden Flächen die Summe 7 ergeben. Aus Symmetriegründen sind dann die End-Lagen '1' und '6' etc. gleich wahrscheinlich. (Skizze zu Beginn der Lernumgebung)

Voraussetzungen

Bruchbegriff, Prozentbegriff sowie das Wechseln zwischen Bruch-, Prozent- und Dezimalbruch-Darstellung sollte einigermassen sitzen.
Einfache Brüche sollten auch addiert werden können; wenn hier aber Probleme auftauchen, sollten entsprechende Rechnungen jederzeit mit Dezimalbrüchen und mit dem Taschenrechner ausgeführt werden dürfen.
Weiter werden in einigen Aufgaben auch Histogramme eingesetzt.

Zur Lernumgebung

Im ersten Teil der Lernumgebung wird vor allem experimentiert. Die entsprechenden Resultate werden auf einem Arbeitsblatt 1 eingetragen.

Wichtig ist, dass im Klassenverband einheitlich "gewürfelt" wird.

- Wird im Klassenzimmer gewürfelt, empfehlen wir für die 2cm-Verbände (wir nennen sie **Z**) einen **grossen Joghurt-Becher** als Wurfbecher, ein glattes Holzbrettchen, eventuell ein Buch als Abschluss. Neben der Vergleichbarkeit besteht dann auch die Gewähr, dass die SchülerInnen nicht die Hälfte der Zeit mit dem Aufheben der Objekte vom Fussboden beschäftigt sind. Es kann aber problemlos auch mit Z's aus 1cm-Würfeln gearbeitet werden, dann reicht auch ein kleinerer Wurfbecher.
- Wenn alle zu Hause auf einem Spannteppich gleichartig werfen (z.B. aus 1 Meter Höhe leicht aus der Hand rollen lassen), sind die Resultate ebenfalls untereinander vergleichbar.

Die "Becher-" und die "Teppich-Technik" führen aber zu leicht unterschiedlichen Verteilungen. Wichtig ist, dass die Klasse ihre eigene Verteilung bestimmt und dann in Lernumgebung und Arbeitsheft diese als Grundlage weiter verwendet.

Bei Zeitknappheit soll man sich klar sein, dass mit der *Lernumgebung allein* die formulierten Richt- und die inhaltlichen Ziele schon abgedeckt werden.

In der ganzen Einheit tauchen eine Anzahl von Begriffe und z.T. nicht ausdrücklich hervorgehobenen formale Beziehungen ("im Sinn von "formelhaft") auf. Wir sind der Meinung, dass die Umgangssprache hier oft sehr nahe und präzis an den Inhalten ist und das Aufstellen von Formeln diese "natürliche Bindung" bei vielen SchülerInnen eher löst als verstärkt ("die Formel lernen ersetzt das Überlegen"). Formeln wie $E = n \cdot p$ sind nicht "Lernstoff", auf sie sollte im Normalfall verzichtet werden. Und ein Begriff wie "theoretische relative Häufigkeit" ist kein Fachterminus (er stammt übrigens von Jugendlichen): der Ausdruck manifestiert aber exakt das Verständnis und den Zusammenhang zwischen Modell und Experiment! Eine Zusammenstellung von vorkommenden Begriffen:

Bereich Experiment, Versuch		**Bereich "Theorie"**	
relative Häufigkeit	h	Wahrscheinlichkeit, ("theoretische relative Häufigkeit")	p
Häufigkeit	H $H = n \cdot h$	Erwartungswert (Erwartung)	E $E = n \cdot p$
Häufigkeitsverteilung, (relative Häufigkeit der Ereignisse)	Tabelle oder Graph, die/der zu jedem Ausgang die Häufigkeit angibt (manchmal: die relative) oft in der Form eines Histogramms	Verteilung, Wahrscheinlichkeitsverteilung	Tabelle **oder** Graph; gibt den Zusammenhang Ausgang → W'keit $X \rightarrow P(X)$ oft in der Form eines Histogramms
Häufigkeitsbaum		Häufigkeitsbaum ("theoretisch")	
		Wahrscheinlichkeitsbaum	
Ausgang (Ereignis, Ausfall)	Resultat, Ergebnis eines Zufallsversuchs	Ausgang (Ereignis, Ausfall)	Resultat, Ergebnis eines Zufallsversuchs

Lösungen

❶ Beim Ersteinsatz des **"Z"** ist dieser sorgfältig zu verkleben. Am Beispiel von "Position 3" erklärt: die Fläche '5' ist bündig in der selben Ebene, das obere Würfel-Paar ist gegen das untere um eine halbe Kantenlänge verschoben. Gegenüber liegen '1' und '6', '2' und '5', '3' und '4'.

❷ Wie bei einem gewöhnlichen Würfel ist die gewürfelte Zahl die oben angeschriebene: in der Darstellung der Lernumgebung also 5, 1, 3, 2, 4 und 6.
Schön wäre, wenn die SchülerInnen noch kein einziges mal geworfen hätten, wenn sie ihre Schätzungen abgeben müssen.
Die geometrischen Überlegungen führen qualitativ zur richtigen Rangfolge, insbesondere auch die (theoretisch) gleichen Häufigkeiten für gegenüberliegende Zahlen, .quantitativ bringt das Experiment sicher starke Korrekturen.
Die Diskussion untereinander führt garantiert zu einem (qualitativen) Konsens.

❸ Eintrag auf dem Arbeitsblatt. Wichtig ist, dass 10 Zehnerserien und nicht eine Hunderterserie geworfen wird. Es muss die Erfahrung in der Gruppe und in der ganzen Klasse gemacht werden, dass von Serie zu Serie grosse Schwankungen auftreten.